Towards Mathematical Sciences
Vol. 2, No. 1, Spring and Summer 2022, 122–134
DOI.10.22067/tmsj.2022.42825
Expository Article

SOME APPROACHES TO IMPROVE TEACHING MATHEMATICS

FATEMEH GHOMANJANI[1*] AND MOHAMMAD KAZEM ANVARI[2]

[1]Kashmar Institute of Higher Education, Kashmar, Iran
f.ghomanjani@kashmar.ac.ir; fatemeghomanjani@gmail.com
[2]Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract. In this note we investigate some practical and effective methods to improve teaching mathematics, mostly in highschool level. These approaches include giving a brief history of the subject, its relation with other sciences, preparing students for higher level subjects and giving simple proofs.

2020 Mathematics Subject Classification. 97B20; 97C70; 97D10
Keywords. Improving mathematics teaching; history of mathematics; simple proofs
Date: Rceived 6-6-2022 Revised 20-8-2022 Accepted 4-9-2022 Available Online 9-9-2022
*Corresponding author.

دوره ۲، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۱، صص. ۱۳۴–۱۲۲
DOI. 10.22067/tmsj.2022.42825

مقاله علمی-ترویجی

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

بعضی از راه‌کارهای ارتقای آموزش ریاضی

فاطمه قومنجانی[1]* و محمد کاظم انوری[2]

[1] مرکزآموزش عالی کاشمر، کاشمر، ایران
f.ghomanjani@kashmar.ac.ir, fatemeghomanjani@gmail.com
[2] دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده. در این نوشتار، پاره‌ای از راهکارهای عملی و موثر برای ارتقای آموزش ریاضی در سطوح دبیرستانی و دانشگاهی ارائه می‌شود. از راهکارهای موثرمی‌توان به بیان تاریخ و فلسفه‌ی ریاضی، ایجاد ارتباط میان بخش های مختلف علوم، ایجاد زمینه برای پذیرش مفاهیم بالاتر، معرفی نمادها و واژه های ریاضی، ارائه‌ی اثبات‌های ساده در حد توان فراگیران اشاره کرد. در این مقاله، تلاش شده است تا راهکارهای ارائه شده در هر مورد با آوردن مثال‌های مناسب بهترو بیشتر تبیین شود.

۰. پیش‌گفتار

برخلاف تصور عام، دانش ریاضی تنها دانش اعداد، ارقام و اشکال هندسی نیست. ریاضیات امروزی برپایه مجموعه‌ها استوار است و بر این اساس فضاهای انتزاعی و مجرد، میدان های جبری و فضاهای توپولوژیکی به وجود می‌آیند. در دانش ریاضی می‌توان، تعریف‌ها، گزاره‌ها و ساختارهای ریاضی را ایجاد، اثبات و یا نقض کرد [۲]. دانش ریاضی، بدون شک مهم‌ترین ابزار بشر در شناسایی طبیعت و بهره برداری از آن بوده است. مفاهیم ریاضی قدمتی به درازای تاریخ انسان دارند. دیدگاهی که اخیرا توسط روبن هرش (ریاضی‌دان و

2020 Mathematics Subject Classification. 97B20; 97C70; 97D10

کلید واژگان. ارتقای آموزش ریاضی، تاریخ ریاضیات، آموزش روش‌های ساده اثبات .
تاریخ: دریافت۱۴۰۱/۳/۱۶ ویرایش ۱۴۰۱/۵/۲۹ پذیرش ۱۴۰۱/۶/۱۳ انتشار بر خط ۱۴۰۱/۶/۱۸

*نویسنده مسئول

نحوه ارجاع به این مقاله: ف. قومنجانی، م.ک. انوری، بعضی از راه‌کارهای ارتقای آموزش ریاضی، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۱۳۴–۱۲۲.

فیلسوف، متولد ۱۹۲۷) در ایالات متحده‌ی آمریکا مطرح شده است، بیان می‌کند که دانش ریاضی، برگرفته از فرهنگ، اجتماع و تاریخ بشر است. این دیدگاه که به دیدگاه انسان‌گرایی در ریاضی موسوم است، با بسیاری از واقعیتهای ملموس در علم ریاضی و علوم دیگر سازگار به‌نظر می‌رسد. درکنار پیشرفت دانش ریاضی، علوم وابسته به آن مانند فیزیک و علوم مهندسی هم ارتقا می‌یابند. از این رو، گسترش حوزه‌ی نفوذ ریاضی برای همه‌ی این علوم بسیار سودمند واقع می‌شود. آموزش و یادگیری ریاضیات فرایندهایی پیچیده هستند که در آن معلمان و فراگیران با یکدیگر ارتباط مستقیمی دارند. ریشه‌این پیچیدگی‌ها در شخصیت فراگیر می‌باشد که دانش، مهارت‌ها و برداشت‌های خود را باشیوه ها و نگرش‌های متفاوت و در سطوح گوناگونی کسب می‌کند، زیرا فرایندهای ذهنی و سطوح آمادگی افراد با یکدیگر متفاوت است (برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۱،۳–۵،۷] رجوع کرد). پیچیدگی عمل تفکر و یادگیری در انسان، دشواری مفاهیم، مهارت‌ها و استدلال‌های ریاضی و نیز ضعف برخی از معلمان و شفاف نبودن هدف‌های برنامه‌ای موجب ناکامی فراگیران دریادگیری دانش ریاضی می‌شود. در واقع ریاضیات عرصه‌ای دشوار برای تدریس و یادگیری می‌باشد [۲]. همچنین یکی دیگر از مشکلات در یادگیری ریاضی، عدم ایجاد ارتباط بین مفاهیم ریاضی است که باعث می‌شود یادگیرنده مجموعه‌ای از مفاهیم مجزا را یاد بگیرد و این مورد زمینه سازی برای ایجاد خلاقیت را مخدوش می‌کند. بنابراین پژوهشگران به دنبال پیداکردن راهکارهایی برای ارتقای آموزش ریاضی هستند.

ما در این مقاله به بیان راهکارهایی برای ارتقای آموزش ریاضی از جمله آموزش روش‌های ساده اثبات و توسعه تفکر ریاضی در استدلال کردن می‌پردازیم که به ویژه در تدریس ریاضیات دبیرستانی و ریاضی عمومی دانشگاهی مفید خواهد بود.

۲. اهمیت بیان تاریخ و فلسفه‌ی ریاضی

یکی از اساسی‌ترین و جذاب‌ترین راهکارها برای تعمیق مفاهیم ریاضی و جذابیت آن‌ها، بیان تاریخ و فلسفه‌ی ریاضی است. در پس هر مفهوم ریاضی هر اندازه که ساده به‌نظر برسد، مفاهیم عمیقی وجود دارد که اشخاص با دانستن آن‌ها، درک بهتری از آن مفهوم خواهند داشت. معرفی ریاضی‌دانان بزرگ و دانشمندان علم ریاضی می‌تواند درکنار آموزش مفاهیم ریاضی بسیار جذاب باشد. معرفی شخصیت‌های بزرگی مانند نیوتن، لایب‌نیتز، اوپیتال، گاوس، کوشی، اولر و .... که هرکدام از برجستگان علم ریاضی به شمار می‌روند و یافته‌های آنان، می‌تواند علاوه بر جذاب‌تر کردن تدریس، زمینه و انگیزه را برای مطالعه‌ی بیشتر افراد فراهم سازد، به گونه‌ای که چه بسا افراد نخبه و مستعد در آینده خود در این ردیف قرار گیرند. به نظر می‌رسد که مطالعه‌ی هر علمی، جدا از مطالعه‌ی دانشمندان مطرح در آن علم و بافته‌های این افراد نیست. به عنوان مثال، انتگرال از مفاهیمی است که همواره برای دانش آموزان و دانشجویان چالش برانگیز است. بد نیست در زمان آموزش آن ذکر شود که مفهوم انتگرال نخستین بار توسط اسحاق نیوتن ریاضی‌دان و فیزیک‌دان نامدار انگلیسی بیان شد و برای آشنایی اهمیت آن خوب است که به بیان تاریخچه کوتاهی از تلاش‌های بسیار در تعمیم آن بپردازیم. مثلا اشاره به‌این که کارل فردریش گاوس ریاضی‌دان بزرگ آلمانی مفهوم انتگرال روی سطح را مطرح کرد، که

با کمک آن قوانین مهم فیزیکی مانند شارهای حاصل از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بیان شد. گاوس بیان می‌کند که شار الکتریکی عبوری از هر سطح بسته، متناسب با بار داخل آن است:

$$\oint EdS = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

به طور مشابه، گاوس ثابت می‌کند که شار مغناطیسی عبوری از هر سطح بسته، همیشه برابر صفر است:

$$\oint BdS = 0.$$

درک صحیح این مفاهیم فیزیکی، مستلزم درک عمیق از این نوع انتگرال‌ها است.

لویی آگوستین کوشی، ریاضی دان مشهور فرانسوی، مفهوم انتگرال‌های مختلط را ارائه داد. پیش از آن، مفهوم انتگرال روی خم (منحنی الخط) توسط گرین ارائه شده بود. انتگرال ریمان اشتیلیس، انتگرال لبگ، انتگرال لوی و .... انواع دیگری از انتگرال‌ها به شمار می روند. البته مقصود از گفتن این مطالب به هیچ عنوان این نیست که چنین انتگرال‌هایی در دوره‌ی دبیرستان یا سال اول دانشگاه تدریس شود، بلکه بهتر است دست‌کم اشاره‌ای به آن صورت گیرد تا با نام آن‌ها آشنا باشند و زمینه برای آموزش آن‌ها در آینده فراهم شود. بدیهی است که این اشاره در حاشیه‌ی درس اصلی انجام می‌گیرد.

۳. ایجاد ارتباط میان بخش های مختلف علوم

یکی از موثرترین ایده‌ها برای جذاب‌تر شدن آموزش ریاضی، بیان ارتباط میان بخش‌های مختلف ریاضی، فیزیک و علوم دیگر است. این کار نه تنها به بهبود یادگیری ریاضی کمک می‌کند، بلکه زمینه را برای ایجاد خلاقیت در اشخاص و خلق ایده‌های جدید فراهم می‌کند. در این‌جا، برای درک بهتر مطلب، مثالی ارائه می دهیم.

بسط دو جمله‌ای نیوتن که از مفید ترین ابزارها در جبر است، در بخش‌های مختلف ریاضی ظاهر می‌شود. توزیع دو جمله‌ای که از مفاهیم مهم در آمار و احتمال است، ارتباط نزدیکی با بسط دو جمله‌ای نیوتن دارد. اگر یک فرایند دو حالته را چند بار تکرار کنیم، توزیع دو جمله‌ای به دست می آید. هنگامی که‌یک سکه را چند بار پرتاب می‌کنیم (یا چند سکه را با هم پرتاب می‌کنیم)، در حقیقت یک بسط دو جمله‌ای را شبیه سازی می‌کنیم. به حالات ممکن برای پرتاب دو سکه توجه کنیم

(رو ,رو)، (پشت ,رو)، (رو ,پشت)، (پشت ,پشت)

حال، به جملات مربوط به اتحاد مربع توجه می کنیم

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb$$

می بینیم که دقیقا همان الگو در این جا دیده می‌شود. با توجه به‌این مطلب، می‌توانیم احتمال‌های مورد نظر را به آسانی بیابیم.

در این‌جا، مثال دیگری از حسابان مطرح می کنیم که ارتباط میان مفاهیم را بیشتر نشان می دهد. ماتریس‌ها از زیباترین ابزارهای ریاضی به شمار می‌روند که در بخش‌های مختلف ریاضی و علوم دیگر کاربرد دارند. تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

معادل ماتریسی آن را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$f \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

در این صورت، ثابت می‌شود که عمل ترکیب توابع، معادل با عمل ضرب ماتریس‌ها است. مثلا با در نظر گرفتن توابع

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x-2},$$

معادل ماتریسی آن‌ها را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad g \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

در این صورت

$$f \circ g \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

و در نتیجه

$$f \circ g = \frac{2x+0}{0x+4} = \frac{x}{2}$$

بیان چنین روابطی و تحلیل آن‌ها این فرصت را به دانش آموز می‌دهد تا در صورت مستعد بودن، خود کاشف روابط بیشتری از این دست شود. این مطلب به نوبه‌ی خود زمینه ساز گسترش روز افزون دانش بشری خواهد بود.

۴. ایجاد زمینه برای پذیرش مفاهیم بالا

سری تیلور، یکی از مهم‌ترین ابزارها در آنالیز است. با کمک سری تیلور، می‌توانیم توابع پیچیده را با کمک چند جمله‌ای‌ها که توابع ساده‌ای هستند، تقریب بزنیم. برای ایجاد زمینه‌ی ذهنی لازم برای پذیرش سری تیلور، می‌توانیم در ابتدای امر با یک مثال به‌این صورت عمل کنیم. می‌دانیم که با افزایش درجه‌ی یک چند جمله‌ای، تعداد ریشه‌های آن افزایش می‌یابد. به عبارت بهتر، تعداد موج‌های آن افزایش می‌یابد. حال تابع سینوس را در نظر می‌گیریم. روشن است که تابع سینوس بی‌نهایت موج دارد. بنابراین طبیعی به‌نظر می‌رسد که (بعد از به‌دست آوردن سری تیلور) بگوییم تابع سینوس یک چند جمله‌ای از درجه‌ی بی‌نهایت است، به‌عبارت بهتر، تابع سینوس یک بی‌نهایت جمله‌ای است.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

البته توجه دادن به این نکته نیز ضروری است که این تعبیر تنها یک توجیه برای درک مقدماتی یک سری تیلور است و مشابهت آن را با چند جمله‌ای‌ها بیان می‌کند، ولی این تمام موضوع نیست و باید به فراگیران تاکید نمود که حتی توابعی که به تعبیر ما فاقد موج هستند (مانند تابع نمایی)، باز هم دارای سری تیلور می‌باشند.

در همین‌جا، مفهوم تابع زوج و فرد هم قابل بیان است. می‌بینیم که در سری تیلور تابع سینوس همه‌ی جملات توان‌های فرد دارند. به‌این دلیل، می‌گوییم سینوس یک تابع فرد است. کلمه‌ی زوج و فرد از همین‌جا ناشی می‌شود، و آن‌چه در کتب درسی به عنوان تعریف نموداری آن ارائه می‌شود، در حقیقت نتیجه‌ای از این ویژگی است. به صورت مشابه برای تابع کسینوس داریم

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

می‌بینیم که در سری تیلور تابع کسینوس همه‌ی جملات توان‌های زوج دارند. به همین دلیل، می گوییم کسینوس یک تابع زوج است.

هم‌ارزی‌ها، نمونه‌ی دیگری از کاربرد سری‌های تابعی هستند. هنگامی که می‌گوییم یک تابع پیچیده هم ارز یک عبارت ساده است، در حقیقت جملات ابتدایی سری تیلور آن را انتخاب کرده‌ایم. برای مثال

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

حال هر اندازه جملات بیشتری از این سری را انتخاب کنیم، تابع سینوس با دقت بیشتری تقریب زده می‌شود.

$$\sin x \sim x,$$
$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!},$$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$
$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

به صورت مشابه برای تابع کسینوس داریم

$$\cos x \sim 1,$$
$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!},$$
$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$
$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

مثال دیگری از ارتباط میان مفاهیم دبیرستانی و دانشگاهی می‌آوریم. مفهوم قدر مطلق، از ساده ترین مفاهیم دبیرستانی است، که در سال‌های اول دبیرستان آموزش داده می‌شود. به دانش آموزان به زبان ساده گفته می‌شود که قدر مطلق، علامت عدد را حذف می‌کند. بنابراین، اعداد مثبت و منفی پس از قرار گرفتن در قدر مطلق، مثبت می‌شوند. حال در دوره‌ی دانشگاهی که قدر مطلق اعداد مختلط آموزش داده می‌شود، این سوال برای اشخاص پیش می‌آید که ارتباط قدر مطلق دبیرستانی با قدر مطلق دانشگاهی چیست. واقعیت این است که همه‌ی قدر مطلق‌ها تعریف یکسانی دارند. به زبان ساده، قدر مطلق یک عدد، فاصله‌ی آن عدد تا صفر است. حال در صفحه‌ی اعداد مختلط و حتی در فضای سه بعدی هم همین تعریف برقرار است. اگر قدر مطلق را به عنوان فاصله تا صفر معرفی کنیم، ابهام آن به صورت کامل برطرف می‌شود،

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

این دقیقاً همان چیزی است که در آنالیز تابعی به عنوان ارتباط متر و نرم در فضاهای نرم‌دار مطرح می‌شود. در حالت کلی داریم

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

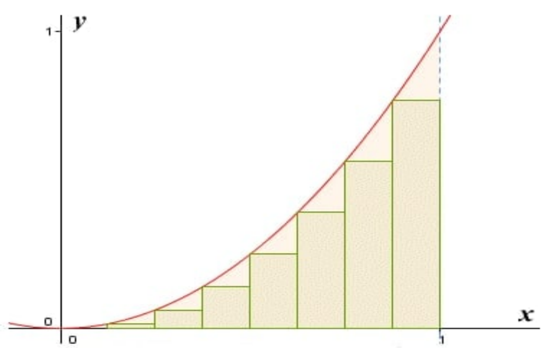
و در حالت خاص داریم

$$\|x\| = d(x, 0).$$

بنابراین، ارائه‌ی صحیح مفهوم قدر مطلق، می‌تواند ابزار توان‌مندی برای ارائه‌ی مفاهیم نرم و متر و ارتباط آن‌ها در رده‌های آموزشی بالاتر باشد. درحقیقت، مفهوم نرم تعمیمی از مفهوم قدر مطلق است.

۵. معرفی نمادها و واژه‌های ریاضی

بیان این که هر نماد در ریاضی نشان چه مفهومی است و چه پیشینه‌ای دارد می‌تواند به پذیرش این مفهوم در ذهن دانش‌آموز یا دانشجو کمک کند. به عنوان مثال، نماد انتگرال یادآور حرف S در زبان انگلیسی است، که برگرفته از کلمه‌ی *sum* به معنای جمع است. نماد Σ (سیگما) هم که برای نشان دادن عمل جمع به‌کار می‌رود، معادل یونانی حرف S در زبان انگلیسی است. هر کسی که مختصری با مفهوم انتگرال آشنا باشد، می‌داند که انتگرال در حقیقت حالت پیوسته‌ی سیگما است. هنگامی که مجموع ریمان یک تابع را برای افرازهای بسیار ظریف از یک مجموعه حساب می کنیم، در حقیقت انتگرال آن تابع را تخمین زده‌ایم. واژه‌ی انتگرال در زبان فرانسه، به معنای کل همه است. این واژه، هم خانواده‌ی واژه‌ی *integer* به معنای عدد صحیح است. نیوتن در کتاب ارزشمند خود، اصول ریاضی فلسفه‌ی طبیعی، این مفهوم را مطرح کرده است. از دیدگاه نیوتون، هنگامی که کل مساحت زیر یک منحنی را محاسبه می کنیم، انتگرال آن را حساب کرده‌ایم. از دید او، قسمت‌های کوچک اضافی که در مجموع ریمان ظاهر می شوند، مانند بخش اعشاری یک عدد هستند، و اگر بتوانیم همه‌ی قسمت‌ها را با هم حساب کنیم، به گونه‌ای که قسمت اضافی وجود نداشته باشد، انتگرال تابع را به دست آورده‌ایم. این مطلب مشابهت مفهوم انتگرال (شکل ۱) را با عدد صحیح روشن می‌کند. در شکل ۲ نمودار

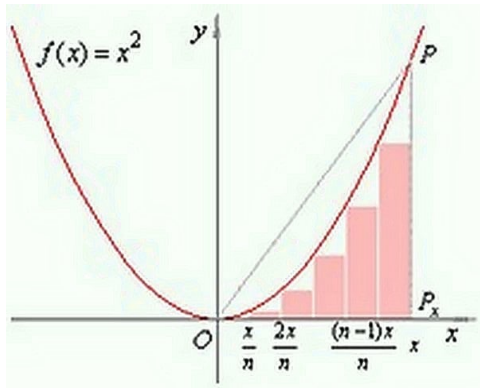


شکل ۱: مفهوم انتگرال

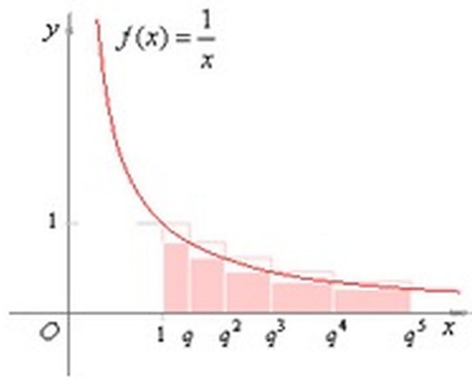
مربوط به انتگرال معین تابع $f(x) = x^2$ را در بازه‌ی $[0, a]$، $a > 0$، می بینیم.

در شکل ۳ نمودار مربوط به انتگرال تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $[1, a]$، $a > 1$، می‌بینیم. این شکل نشان می‌دهد که در بررسی انتگرال معین، لزوما افرازها مساوی نیستند.

واژه‌ی مهم دیگر در ریاضیات دبیرستانی، واژه‌ی دیفرانسیل است که ریشه در کلمه‌ی *difference* به معنای تفاوت و اختلاف دارد. همه می‌دانند که مشتق یک تابع، نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر آن برای تغییرات بسیار کوچک است. از این رو دانش‌آموز با آگاهی از این مطلب که دیفرانسیل به معنای تغییرات و نمو یک متغیر است، می‌تواند درک بهتری از فرمول آن داشته باشد و خود در صورت لزوم فرمول را به‌دست

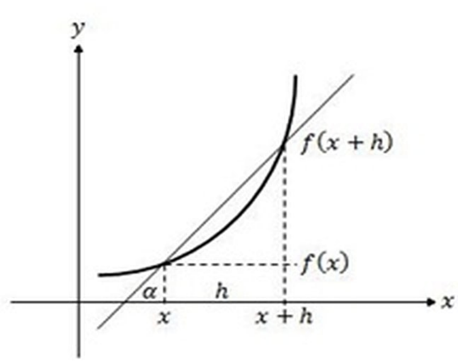


شکل ۲: انتگرال معین $f(x) = x^2$ در بازه‌ی $[0, a]$، $a > 0$.



شکل ۳: انتگرال $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه‌ی $[1, a]$، $a > 1$

آورد. شکل ۴، مفهوم مشتق را به عنوان نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر آن، تداعی می‌کند. نمادهای



شکل ۴: مفهوم مشتق

دیگری که در حسابان به کار می‌روند نمادهای $'$ و $''$ برای نشان دادن مشتق اول و دوم یک تابع هستند، که

آن‌ها را به‌ترتیب پریم و زگوند تلفظ می‌کنیم. بد نیست اگر به دانش‌آموزان گفته شود که پریم و زگوند به ترتیب تلفظ فرانسه واژه *prime* به معنای اول و *second* به معنای دوم است.

۶. ارائه‌ی اثبات‌های ساده در حد توان دانش آموزان

یکی از آفات جدی در آموزش ریاضی و علوم پایه دیگر این است که دانش آموزان صرفا مجبورند با حفظ اسامی و فرمول‌های خاص، آن‌ها را در مسائل مختلف به‌کار برند، بدون این‌که کوچک‌ترین آگاهی از مفاهیم و اثبات‌های آن داشته باشند. این مساله به‌ویژه در آزمون‌های چند گزینه‌ای که در آن‌ها حل‌های سریع و کوتاه به دانش آموزان گفته می‌شود، بیشتر به چشم می‌خورد. البته منظور این نیست که راه حل‌های سریع و میان‌بر به‌طور کلی کنار گذاشته شوند، بلکه باید قبل از ارائه‌ی آن‌ها به دانش آموز، تلاش شود تا در حد امکان مفاهیم و روش‌های اصلی هم آموزش داده شوند. به عنوان مثال، به دانش آموزان گفته می‌شود که هر عدد به توان صفر مساوی یک می‌شود. اغلب دانش آموزان این را به عنوان یک اصل حفظ می‌کنند. حال آن‌که با آگاهی مختصری از ویژگی های توان، می‌توانند درک بهتری از چرایی آن داشته باشند. برای مثال، به عبارت زیر توجه می کنیم

$$\frac{2^3}{2^3}$$

این عبارت را از دو طریق می‌توان محاسبه کرد، از یک سو روشن است که

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1.$$

از سوی دیگر، می‌دانیم که اگر پایه‌ها برابر باشند، در تقسیم توان‌ها از هم کم می‌شوند، پس

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1,$$

بنابراین

$$2^0 = 2^{3-3} = \frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1.$$

در همین‌جا، دانش آموز نکته سنج و باهوش متوجه می‌شود که چرا صفر به توان صفر تعریف نمی‌شود، زیرا از بحث بالا برمی‌آید که

$$0^0 = \frac{0}{0}.$$

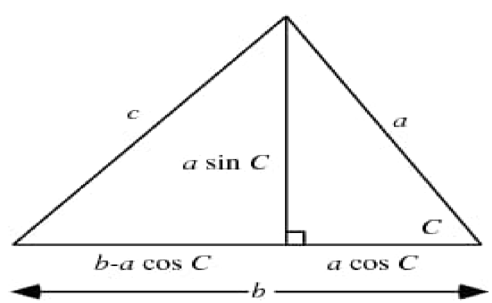
همچنین مبهم بودن $\frac{0}{0}$ را نیز می‌توان به‌سادگی توضیح داد. فرض کنیم $a = \frac{0}{0}$. در این صورت، $a \cdot 0 = 0$ که در این‌جا a می‌تواند هر عددی باشد. بنابراین عدد مشخصی برابر کسر $\frac{0}{0}$ نیست و به همین دلیل آن را مبهم گوییم. همچنین، اثبات مشابهی مانند فوق را می‌توانیم برای درک توان‌های منفی ارائه دهیم.

سری هم‌ساز یکی از آموزنده ترین سری‌های آنالیز ریاضی است. واگرایی سری هم‌ساز، نشان می‌دهد که حتی کوچک بودن جملات و میل کردن آن‌ها به صفر، شرط کافی برای همگرایی آن سری نیست. اثبات مقایسه‌ای جالبی را در زیر می‌بینیم

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots &> 1+\frac{1}{2} \\ &+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots. \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که در طرف راست، تعداد نامتناهی جمله‌ی $\frac{1}{2}$ داریم. دانش آموز در همین‌جا می‌تواند مفهوم بی‌نهایت را درک کند. اگر یک مقدار مشخص را به صورت بی‌پایان با خودش جمع کنیم، حاصل بیشتر و بیشتر می‌شود و از هر عددی بزرگ تر می‌شود.

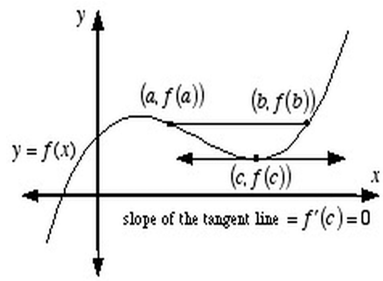
مثالی از هندسه می‌آوریم. قضیه‌ی کسینوس‌ها در حقیقت حالت کلی قضیه فیثاغورس است، اما جالب است که حالت کلی با استفاده از حالت خاص خود ثابت می‌شود. در شکل ۵، اگر قضیه‌ی فیثاغوس را برای مثلث کوچک‌تر که c وتر آن است بنویسیم، قضیه‌ی کسینوس‌ها به دست می آید.



شکل ۵: معادل بودن قضیه فیثاغورس با قضیه‌ی کسینوس‌ها

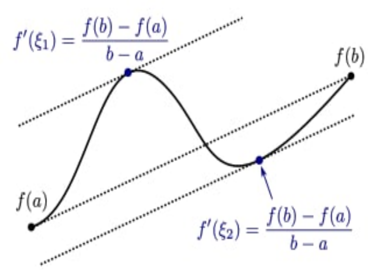
از سوی دیگر، اگر در قضیه‌ی کسینوس‌ها، زاویه را برابر نود درجه در نظر بگیریم، قضیه‌ی فیثاغورس به دست می آید. این مطلب نشان می دهد که بر خلاف تصور عمومی، قضیه‌ی فیثاغورس حالت خاصی از قضیه‌ی کسینوس‌ها نیست، بلکه با آن معادل است . مثال مشابه دیگری از آنالیز ریاضی می‌آوریم. قضیه‌ی مقدار میانگین در حقیقت حالت کلی قضیه‌ی رول است، اما جالب است که حالت کلی با استفاده از حالت خاص خود ثابت می‌شود. بر خلاف تصور عمومی، قضیه‌ی رول حالت خاصی از قضیه‌ی مقدار میانگین نیست، بلکه با

آن معادل است. شکل ۶، نمایی از قضیه‌ی رول را نمایش می دهد. همان‌گونه که در شکل ۷ مشاهده می‌کنیم،



شکل ۶: نمایی از قضیه‌ی مقدار میانگین

قضیه‌ی مقدار میانگین از لحاظ هندسی با چرخاندن شکل از قضیه‌ی رول نتیجه می‌شود. پس این دو با هم معادل هستند.



شکل ۷: معادل بودن قضیه‌ی رول با قضیه‌ی مقدارمیانگین

۷. نتیجه گیری

ریاضیات عرصه‌ای دشوار برای تدریس و یادگیری می‌باشد. از مشکلات در آموزش ریاضی و دیگر علوم پایه این است که دانش آموزان صرفا مجبورند با حفظ اسامی و فرمول‌های خاص، بدون آگاهی از مفاهیم و اثبات‌های آن، آن‌ها را در مسائل مختلف به‌کار برند. دراین‌جا پیشنهاد می‌شود که قبل از ارائه‌ی آن‌ها به فراگیر، تلاش شود تا در حد امکان مفاهیم و روش‌های اصلی هم آموزش داده شوند. ما دراین مقاله، به بیان چند راهکار برای ارتقای آموزش ریاضی پرداختیم که عبارت بودند از بیان تاریخچه مترتب بر مفاهیم ریاضی، ایجاد ارتباط میان بخش‌های مختلف علوم، ایجاد زمینه برای پذیرش مفاهیم بالاتر، معرفی نمادها و واژه‌های ریاضی و ارائه‌ی اثبات‌های ساده در حد توان فراگیران.

سپاس‌گزاری

در پایان قصد داریم که از تمامی زحمات سردبیر مجله و داوران محترم به دلیل پیشنهادات خوبی که برای بهبود این مقاله داشتند، تشکر و قدردانی نماییم.

مراجع

[۱] ت. سیگفرید، *ریاضیات زیبا*، ترجمه مهدی صادقی، نشر نی، ۱۳۹۶.

[۲] ح. علم الهدی، *اصول آموزش ریاضی*، نشر نما، ۱۳۹۹.

[۳] م. ر. کرامتی، *آموزش ریاضی در هزاره‌ی سوم*، نشر صدای معاصر، ۱۳۹۰.

[۴] ر. کورانت، ر. رابینز، *ریاضیات چیست؟*، ترجمه‌ی حسن صفاری، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۹.

[۵] ز. گویا، *آموزش ریاضی چه نیست؟* دو فصل نامه‌ی نظریه و عمل در برنامه‌ی درسی، **۲** (۱۳۹۳)، شماره ۳، ۲۴–۵.

[۶] ز. گویا، ا.ح. آشنا، *از آموزش و ریاضی، تا آموزش ریاضی*، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۸۵** (۱۳۹۵)، ۱۵–۹.

[۷] م. هندرسون، *نظریه‌های تاثیرگذار در علم ریاضیات*، ترجمه‌ی سحر عرب زاده، نشرسبزان، ۱۳۹۶.